

ETUDE DU TRANSFERT DE MATIERE DÛ A UNE INJECTION PARIETALE NORMALE LOCALISEE, DANS UN ECOULEMENT LAMINAIRE A GRAND NOMBRE DE SCHMIDT

J. C. BESSE et P. DUMARGUE

Laboratoire de Physique et Mécanique des Fluides, Faculté des Sciences de Poitiers,
 Equipe no. III du Laboratoire Associé no. 191 du C.N.R.S., 40, Avenue du Recteur Pineau,
 86022 Poitiers Cédex, France

(Reçu le 17 septembre 1980)

Résumé—L'étude présente est axée sur le problème du transfert de matière occasionné par l'injection d'un fluide, normalement à un écoulement principal, plan et laminaire, dans l'hypothèse où aucune réaction chimique ne se produit dans la zone de soufflage. Une solution au problème dynamique de perturbation est établie, dans le cas d'une injection par milieu poreux. Dans ces conditions, vu la très faible épaisseur de la couche limite de diffusion, le problème du transfert de matière se simplifie et une relation donnant l'évolution approchée de la concentration du fluide injecté, en aval de la fente de soufflage au voisinage de la paroi, est déterminée. Elle permet d'envisager la mesure du frottement pariétal par une détection de la concentration locale.

NOMENCLATURE

<p>a, largeur de la fente d'injection;</p> <p>$Ai(\eta), Bi(\eta)$, fonctions d'Airy;</p> <p>c, concentration (mole/cm³);</p> <p>C_0, concentration de référence;</p> <p>c_+, concentration adimensionnelle;</p> <p>\bar{C}, transformée de Laplace de c_+ relative à \dot{x}_+;</p> <p>C_+^*, = c_+ ($\dot{x}_+ = 1, \dot{y}_+$);</p> <p>D, coefficient de diffusion;</p> <p>$f(p, \dot{y}_+)$ } $F(\dot{x}_+, \dot{y}_+)$ } fonctions;</p> <p>$F(u-1, y)$ } $H(x)$, fonction d'Heaviside;</p> <p>$K_{1/3}(x)$, fonction de Bessel modifiée d'ordre 1/3;</p> <p>$K_{2/3}(x)$, fonction de Bessel modifiée d'ordre 2/3;</p> <p>L, longueur de référence;</p> <p>p, variable de Laplace;</p> <p>P, pression;</p> <p>\bar{P}, pression stationnaire;</p> <p>\bar{P}_0, pression stationnaire de référence = ρU_M^2;</p> <p>\bar{P}_+, pression stationnaire adimensionnelle;</p> <p>\tilde{p}, pression relative à la perturbation;</p> <p>\tilde{p}_0, = $\rho U_M V_0 (a/L)^{-1/3} Re^{-1/2}$;</p> <p>$\tilde{p}_+$, = \tilde{p}/\tilde{p}_0 pression adimensionnelle relative à la perturbation;</p> <p>Re, $U_M L/\nu$ nombre de Reynolds;</p> <p>s, ($u = sy$), gradient pariétal de vitesse;</p> <p>s_+, valeur adimensionnelle de S dans le problème hydrodynamique;</p> <p>\dot{s}_+, valeur adimensionnelle de S dans le problème de transfert de matière;</p> <p>Sc, = ν/D nombre de Schmidt;</p>	<p>u, v, composantes de la vitesse;</p> <p>\bar{U}, \bar{V}, composantes de la vitesse non perturbée (avant la fente d'injection);</p> <p>\bar{U}_+, \bar{V}_+, composantes de la vitesse adimensionnelle non perturbée dans δ_H;</p> <p>$\bar{U}_{e+}(x_+)$, valeur de U_+ hors de la couche limite hydrodynamique;</p> <p>\bar{U}_+^*, \bar{V}_+^*, composantes de la vitesse adimensionnelle non perturbée relatives à δ_H;</p> <p>\tilde{u}, \tilde{v}, composantes de la vitesse de perturbation;</p> <p>\tilde{u}_+, \tilde{v}_+, composantes de la vitesse adimensionnelle de perturbation hydrodynamique;</p> <p>\dot{u}_+, \dot{v}_+, composantes de la vitesse adimensionnelle de perturbation dans le transfert de matière;</p> <p>U_m, valeur moyenne de u;</p> <p>U_M, vitesse de référence (u à la frontière de la couche limite);</p> <p>V_0, vitesse d'injection;</p> <p>x, y, coordonnées;</p> <p>\bar{x}_+, \bar{y}_+, coordonnées adimensionnelles non perturbées;</p> <p>\tilde{x}_+, \tilde{y}_+, coordonnées adimensionnelles relatives à la perturbation;</p> <p>\dot{x}_+, \dot{y}_+, coordonnées adimensionnelles relatives au transfert de matière;</p> <p>\dot{x}_+^*, = $(\dot{x}_+ - 1)$;</p> <p>Symbols grecs</p> <p>δ_D, épaisseur de la couche limite de diffusion;</p> <p>δ_H, épaisseur de la couche limite hydrodynamique;</p> <p>$\bar{\delta}_H$, épaisseur de la couche limite de perturbation;</p>
--	---

$\eta,$	$= \delta_+^{1/3} p^{1/3} \dot{\gamma}_+,$ variable;
$\xi,$	variable;
$\nu,$	viscosité cinématique;
$\rho,$	masse volumique;
$\Gamma(x),$	fonction gamma;
$\Gamma(\alpha, x),$	fonction gamma incomplète.

1. INTRODUCTION

BEAUCOUP d'études ont déjà été faites sur la déflexion d'un jet (vitesse moyenne V_0) pénétrant à travers une paroi dans un écoulement principal (vitesse moyenne U_m).

Lorsque $V_0 \sim U_m$, nous pouvons citer Ehrich [1] qui propose une théorie du jet plan oblique en fluide parfait très complète, puis Wygnanski et Newman [2], Nunn et Brandt [3], Stek et Brandt [4] qui complètent ces résultats par des études expérimentales. Bergeles, Gosman et Launder [5-8] ont également beaucoup apporté dans ce domaine en considérant, non plus des problèmes plans, mais des configurations tri-dimensionnelles dues à un ou plusieurs jets circulaires débouchant normalement ou obliquement dans un écoulement principal laminaire.

Lorsque l'écoulement principal est turbulent Chan, Lin et Kennedy [9], puis Eskinasi [10] ont examiné expérimentalement les coefficients de traînée, d'entraînement, les structures tourbillonnaires et leur intensité. Parmi les applications de ces études, notons les problèmes d'environnement (fumées de cheminées par exemple), d'aéronautique. Du point de vue des transferts de chaleur et de matière pour cette gamme de vitesse ($V_0 \sim U_m$) les travaux sont moins nombreux et nous pouvons citer parmi les plus récents [11, 12].

Lorsque $V_0 \ll U_m$, nous trouvons également de nombreux travaux dont les plus anciens sont largement cités par Schlichting [13]. Parmi les travaux récents, nous mentionnerons ceux de Aggarwala et Gangal [14] et Mukunda, Subhananda et Sambashiva Rao [15] dans des tubes de section non circulaire, celui de Fiveland et Lu [16] dans le cas d'écoulements instationnaires plans incompressibles. Du point de vue des transferts de chaleur et de matière, nous trouvons beaucoup plus de résultats que dans le cas précédent. Il suffit de se rapporter à Schlichting [13] pour avoir un aperçu des travaux jusqu'à 1968. Parmi les plus récents, nous citerons [17, 18]. Sur le plan des applications, nous indiquerons celles concernant l'aérodynamique (contrôle des couches limites, réduction des transferts thermiques dans les vols à grande vitesse, ...), la combustion, etc. ...

L'étude théorique que nous présentons concerne le transfert de matière dû à une injection pariétale normale, localisée, à travers un milieu poreux, dans un écoulement laminaire à grand nombre de Reynolds. Elle a pour but d'introduire une nouvelle méthode de mesure du frottement pariétal local en hydrodynamique.

Considérons l'écoulement plan stationnaire d'un liquide newtonien au voisinage d'une paroi solide

plane. La couche limite visqueuse a une épaisseur δ_H (Fig. 1). Introduisons un système de référence tel que l'axe Ox soit colinéaire à la paroi solide et Oy normal. Nous choisissons l'origine O à l'entrée de la fente de soufflage, la largeur de cette dernière étant a . Nous supposons que les dimensions de cette fente sont suffisamment petites pour que le profil des vitesses $\bar{U}(x, y)$ en l'absence de soufflage, ne soit pas modifié au voisinage de la fente. Nous supposons également que la fente de soufflage se présente sous la forme d'un milieu poreux, tel que le profil des vitesses en $y = 0$, dans le domaine $0 < x < a$, admet pour composante normale la vitesse uniforme V_0 .

Nous nous proposons d'étudier l'écoulement perturbé par l'injection d'une espèce chimique de concentration C_0 , en $y = 0$, pour $0 < x < a$, ainsi que la distribution de concentration dans le domaine $x > a$.

2. LE PROBLEME DYNAMIQUE

Examinons maintenant l'écoulement dans la zone de soufflage. Nous devons partir des équations de Navier-Stokes pour un fluide à propriétés physiques constantes, écrites dans le système de référence défini précédemment

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) & (1) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) & (2) \end{cases}$$

et on y adjoint l'équation de conservation de masse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Dans ces relations u, v sont les composantes de la vitesse, P la pression, ρ la masse volumique, et ν la viscosité cinématique.

Nous utilisons une méthode de perturbation pour résoudre ce problème. Ainsi nous désignons par

$$\begin{cases} u = \bar{U}(x, y) \\ v = \bar{V}(x, y) \end{cases} \quad \text{pour } x < 0 \quad (4)$$

la distribution des vitesses avant la fente de soufflage, et par

$$\begin{cases} u = \bar{U}(x, y) + \tilde{u}(x, y) \\ v = \bar{V}(x, y) + \tilde{v}(x, y) \end{cases} \quad \text{pour } x > 0 \quad (5)$$

la distribution des vitesses au dessus de cette fente. Il en découle une décomposition équivalente pour la pression.

Il nous est possible, dans ces conditions, de décomposer le système (1)-(3) en deux systèmes

(a) Equations de l'écoulement non perturbé

$$\begin{cases} \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \right) & (6) \\ \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} \right) & (7) \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = 0. & (8) \end{cases}$$

(b) Equations de perturbation

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{V} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0. \quad (11)$$

2.1. Simplification et résolution des équations de l'écoulement non perturbé

Afin de pouvoir simplifier les systèmes d'équations précédents, nous introduisons une notation adimensionnelle; ce qui nous amène à définir les ordres de grandeurs suivants pour l'écoulement non perturbé

$$\bar{U} \sim U_M, \quad x \sim L, \quad y \sim \delta_H, \quad \bar{P} \sim \bar{P}_0 = \rho U_M^2$$

et en vertu de (8)

$$\bar{V} \sim L^{-1} \delta_H U_M.$$

U_M représentant la valeur de la vitesse à la frontière de la couche limite (en $y = \delta_H$) et L l'échelle de longueur caractéristique de la paroi.

Nous utilisons un indice + pour toute grandeur adimensionnelle, soit

$$\begin{aligned} \bar{x}_+ = \frac{x}{L}, \quad \bar{y}_+ = \frac{y}{\delta_H}, \quad \bar{U}_+ = \frac{\bar{U}}{U_M}, \\ \bar{V}_+ = \frac{\bar{V}}{U_M} \frac{L}{\delta_H}, \quad \bar{P}_+ = \frac{\bar{P}}{\rho U_M^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Si nous faisons l'hypothèse que le nombre de Reynolds défini par

$$Re = \frac{U_M L}{\nu} \quad (13)$$

est très grand ($Re \gg 1$) mais tel que l'écoulement reste laminaire (pour fixer les idées, nous supposons que $Re \sim 10^4$), nous pouvons simplifier le système (6)–(8) et le réduire au système bien connu des équations de couche limite

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{U}_+ \frac{\partial \bar{U}_+}{\partial \bar{x}_+} + \bar{V}_+ \frac{\partial \bar{U}_+}{\partial \bar{y}_+} = -\frac{\partial \bar{P}_+}{\partial \bar{x}_+} + \frac{\partial^2 \bar{U}_+}{\partial \bar{y}_+^2} \end{aligned} \right. \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}_+}{\partial \bar{y}_+} = 0 \end{aligned} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_+}{\partial \bar{x}_+} + \frac{\partial \bar{V}_+}{\partial \bar{y}_+} = 0 \end{aligned} \right. \quad (16)$$

avec les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{aligned} \text{en } \bar{y}_+ = 0, \quad \bar{U}_+ = \bar{V}_+ = 0 \\ \text{pour } \bar{y}_+ \rightarrow +\infty, \quad \bar{U}_+ \rightarrow \bar{U}_+(\bar{x}_+) \end{aligned} \right. \quad (17)$$

l'épaisseur de la couche limite δ_H étant liée à L par

$$\frac{\delta_H}{L} = Re^{-1/2}. \quad (18)$$

Nous supposons que la résolution de ce système est possible et nous conduit à une solution connue

$$\bar{U}_+ = \bar{U}_+(\bar{x}_+, \bar{y}_+). \quad (19)$$

2.2. Simplification des équations de perturbation

Pour réduire les équations de perturbation, nous admettons que la vitesse V_0 d'injection du fluide dans la fente est très faible (par exemple $V_0 \sim 10^{-3} U_M$).

En conséquence, l'épaisseur δ_H dans laquelle se produit une perturbation de l'écoulement sera beaucoup plus petite que celle de la couche limite δ_H .

Les ordres de grandeur que nous utilisons alors dans ces équations sont

$$x \sim a, \quad y \sim \delta_H, \quad \bar{v} \sim V_0, \quad \bar{p} \sim \bar{p}_0,$$

$$\bar{U} \sim \frac{\delta_H}{\delta_H} U_M, \quad \bar{V} \sim \frac{\delta_H}{L} U_M$$

et en vertu de l'équation de conservation de masse (11): $\bar{u} \sim (a/\delta_H) V_0$. D'où la notation adimensionnelle suivante

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{x}_+ = \frac{x}{a}, \quad \bar{y}_+ = \frac{y}{\delta_H}, \quad \bar{p}_+ = \frac{\bar{p}}{\bar{p}_0}, \\ \bar{U}_+^* = \frac{\bar{U}}{U_M} \frac{\delta_H}{\delta_H}, \quad \bar{V}_+^* = \frac{\bar{V}}{U_M} \frac{L}{\delta_H}, \quad \bar{u}_+ = \frac{\bar{u}}{V_0} \frac{\delta_H}{a}, \quad \bar{v}_+ = \frac{\bar{v}}{V_0} \end{aligned} \right. \quad (20)$$

qui implique pour δ_H et \bar{p}_0 un choix tel que

$$\frac{\delta_H}{L} = \left(\frac{a}{L} \right)^{1/3} Re^{-1/2} \quad (21)$$

$$\bar{p}_0 = \rho U_M V_0 \left(\frac{a}{L} \right)^{-1/3} Re^{-1/2}. \quad (22)$$

Nous pouvons ainsi réduire, en nous limitant à une approximation du premier ordre, le système (6)–(8) à

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{U}_+^* \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \bar{x}_+} + \bar{v}_+ \frac{\partial \bar{U}_+^*}{\partial \bar{y}_+} = \frac{\partial^2 \bar{u}_+}{\partial \bar{y}_+^2} \end{aligned} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}_+}{\partial \bar{y}_+} = \frac{\partial^2 \bar{v}_+}{\partial \bar{y}_+^2} - \bar{U}_+^* \frac{\partial \bar{v}_+}{\partial \bar{x}_+} \end{aligned} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \bar{x}_+} + \frac{\partial \bar{v}_+}{\partial \bar{y}_+} = 0 \end{aligned} \right. \quad (25)$$

à condition que nous imposons

$$Re \gg 1, \quad \frac{V_0}{U_M} \ll 1, \quad \frac{a}{L} \ll 1$$

ce qui pour se fixer les idées peut être

$$Re \sim 10^4, \quad \frac{V_0}{U_M} \sim 10^{-3}, \quad \frac{a}{L} \sim 10^{-2}. \quad (26)$$

Si nous notons également que compte tenu de ces estimations et comme nous l'avons supposé précédemment $\delta_H \ll \delta_H$, nous pouvons pour cette approxima-

tion n'utiliser que le premier terme du développement suivant les puissances de y de U , soit

$$\bar{U}_+^* = s_+ \tilde{y}_+ \quad \text{avec} \quad s_+ = \frac{s \bar{\delta}_H}{U_M}$$

Par ailleurs, comme pour le transfert de matière, seules les vitesses interviennent, nous limitons notre étude à la résolution de (23) associée à (25), ce qui permet de réduire le système précédent, après dérivation de (23) par rapport à \tilde{x}_+ compte tenu de (26), à l'équation

$$s_+ \left(\tilde{y}_+ \frac{\partial^2 \tilde{v}_+}{\partial \tilde{x}_+ \partial \tilde{y}_+} - \frac{\partial \tilde{v}_+}{\partial \tilde{x}_+} \right) = \frac{\partial^3 \tilde{v}_+}{\partial \tilde{y}_+^3} \quad (27)$$

avec les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{pour } \tilde{x}_+ < 0 & \text{et } \forall \tilde{y}_+ \quad \tilde{v}_+(\tilde{x}_+, \tilde{y}_+) = 0 \\ \text{pour } 0 < \tilde{x}_+ < 1 & \text{en } \tilde{y}_+ = 0 \quad \tilde{v}_+(\tilde{x}_+, \tilde{y}_+) = 1 \\ & \text{pour } \tilde{y}_+ \rightarrow +\infty \quad \tilde{v}_+(\tilde{x}_+, \tilde{y}_+) \rightarrow 0 \\ \text{pour } \tilde{x}_+ > 1 & \text{en } \tilde{y}_+ = 0 \quad \tilde{v}_+(\tilde{x}_+, \tilde{y}_+) = 0 \\ & \text{pour } \tilde{y}_+ \rightarrow +\infty \quad \tilde{v}_+(\tilde{x}_+, \tilde{y}_+) \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad (28)$$

2.3. Solution du problème de perturbation

Nous appliquons la transformée de Laplace sur la variable \tilde{x}_+ et notons par p la variable de Laplace. L'équation (27) se ramène à l'équation différentielle

$$\frac{d^3 \tilde{V}}{d\tilde{y}_+^3} - s_+ p \tilde{V} + \frac{d\tilde{V}}{d\tilde{y}_+} + s_+ p \tilde{V} = 0 \quad (29)$$

dont la solution vérifiant les conditions aux limites (28), s'écrit

$$\tilde{V}(p, \tilde{y}_+) = - \frac{2s_+^{1/3}}{3^{2/3}\Gamma(2/3)} \frac{1 - e^{-p}}{p^{2/3}} - \chi \tilde{y}_+ \int_x^{\tilde{y}_+} \frac{K_{2/3}(2/3 s_+^{1/2} p^{1/2} \tilde{y}_+^{3/2})}{\tilde{y}_+} d\tilde{y}_+ \quad (30)$$

où $K_{2/3}(\chi)$ est une fonction de Bessel modifiée d'ordre 2/3. Posons alors

$$f(p, \tilde{y}_+) = \frac{3^{2/3} p^{1/3}}{s_+^{1/3}} \frac{K_{2/3}(2/3 s_+^{1/2} p^{1/2} \tilde{y}_+^{3/2})}{\tilde{y}_+} \quad (31)$$

et soit $F(\tilde{x}_+, \tilde{y}_+)$ son originale. Nous avons

$$F(\tilde{x}_+, \tilde{y}_+) = \frac{1}{2} \frac{e^{-s_+ \tilde{y}_+^{3/2}/3^2 \tilde{x}_+}}{\tilde{x}_+^{5/3}} \quad (32)$$

La perturbation transversale du champ des vitesses s'exprime alors par la fonction originale de (30), soit par

$$\tilde{v}_+(\tilde{x}_+, \tilde{y}_+) = - \frac{2s_+^{2/3}}{3^{4/3}\Gamma(2/3)} \tilde{y}_+ \int_x^{\tilde{y}_+} \times \left\{ \int_0^{\tilde{x}_+} [F(u, y) - F(u-1, y)] du \right\} dy \quad (33)$$

avec

$$F(u-1, y) = H(u-1)F(\tilde{x}_+ - u, y)$$

et $H(\chi)$: fonction d'Heaviside.

En utilisant la fonction gamma incomplète $\Gamma(\alpha, \chi)$, (33) s'écrit

$$\tilde{v}_+(\tilde{x}_+, \tilde{y}_+) = - \frac{\tilde{y}_+}{\Gamma(2/3)} \left\{ \int_x^{\tilde{y}_+} \frac{\Gamma[2/3, s_+ y^3/3^2 \tilde{x}_+]}{y^2} dy - H(\tilde{x}_+ - 1) \int_x^{\tilde{y}_+} \frac{\Gamma[2/3, s_+ y^3/3^2 (\tilde{x}_+ - 1)]}{y^2} dy \right\} \quad (34)$$

Expression qui traduit que $\tilde{v}_+(\tilde{x}_+, \tilde{y}_+)$ se comporte en première approche comme une perturbation en créneau unitaire au niveau de la fente de soufflage.

Pour ce qui est du calcul de la composante axiale $\tilde{u}_+(\tilde{x}, \tilde{y}_+)$, nous noterons que son calcul à partir de l'équation de continuité fait apparaître une singularité en $\tilde{y}_+ = 0$ qui ne nous gêne en aucune sorte, puisque nous aurons de toute façon $\bar{U}_+^* \gg \tilde{u}_+$ pour la suite de ce travail.

3. LE TRANSFERT DE MATIERE

Supposons que l'on injecte par l'orifice poreux une espèce chimique de concentration C_0 en $\tilde{y}_+ = 0$ pour $0 < \tilde{x}_+ < 1$, nous allons chercher la distribution de concentration dans le domaine fluide $\tilde{y}_+ \geq 0, \tilde{x}_+ > 0$.

L'équation de conservation de masse s'écrit

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (35)$$

avec D = coefficient de diffusion de l'espèce injectée dans le milieu fluide considéré.

3.1. Simplification du problème

Nous faisons l'hypothèse qu'il n'y a pas de réaction chimique dans le volume. Les gradients de concentration s'établissent dans un domaine de y d'épaisseur δ_D .

La vitesse u peut se décomposer en

$$u = \bar{U} + \tilde{u}$$

mais, étant donné les ordres de grandeur du paragraphe précédent, le rapport \tilde{u}/\bar{U} vaut environ 10^{-2} . Par conséquent, nous admettons que $u \simeq \bar{U}$ et dans ces conditions, nous prenons comme ordres de grandeur

$$x \sim a, \quad y \sim \delta_D, \quad c \sim C_0, \quad u \sim U_M \frac{\delta_D}{\delta_H}, \quad v \simeq \tilde{v} \sim V_0$$

ce qui nous conduit à la notation adimensionnelle suivante

$$\begin{aligned} \dot{x}_+ &= \frac{x}{a} = \tilde{x}_+, & \dot{y}_+ &= \frac{y}{\delta_D}, & c_+ &= \frac{c}{C_0}, \\ \dot{u}_+ &= \frac{u}{U_M} \frac{\delta_H}{\delta_D}, & \dot{v}_+ &= \frac{v}{V_0} = \tilde{v}_+. \end{aligned} \quad (36)$$

L'équation (35) s'écrit alors

$$\dot{u}_+ \frac{\partial c_+}{\partial \tilde{x}_+} + \frac{V_0}{U_M} \left(\frac{a}{L} \right)^{1/3} Re^{1/2} Sc^{2/3} \dot{v}_+ \frac{\partial c_+}{\partial \tilde{y}_+} = \frac{\partial^2 c_+}{\partial \tilde{y}_+^2} \quad (37)$$

δ_D étant choisi tel que

$$\frac{\delta_D}{L} = Sc^{-1/3} \left(\frac{a}{L}\right)^{1/3} Re^{-1/2} \quad (38)$$

Sc représente le nombre de Schmidt défini par

$$Sc = \frac{\nu}{D} \quad (39)$$

Sa valeur étant pour se fixer les idées de l'ordre de 10^3 , on constate que le coefficient

$$\frac{V_0}{U_M} \left(\frac{a}{L}\right)^{1/3} Re^{1/2} Sc^{2/3}$$

est de l'ordre de l'unité.

Par conséquent, nous pouvons admettre que l'équation (37) se réduit à

$$\dot{u}_+ \frac{\partial c_+}{\partial \dot{x}_+} + \dot{v}_+ \frac{\partial c_+}{\partial \dot{y}_+} = \frac{\partial^2 c_+}{\partial \dot{y}_+^2} \quad (40)$$

En notant qu'avec les estimations précédentes $\delta_D \ll \bar{\delta}_H$ et $\delta_D \ll \bar{\delta}_H$ respectivement, on peut admettre raisonnablement d'utiliser d'une part le premier terme du développement suivant les puissances de y de u soit :

$$\dot{u}_+ = \dot{s}_+ \dot{y}_+ \quad \text{avec} \quad \dot{s}_+ = \frac{s \bar{\delta}_H}{U_M} = s_+ \quad (41)$$

et d'autre part la réduction à

$$\begin{cases} \dot{v}_+ = \dot{v}_+ = 1 & \text{pour } 0 < \dot{x}_+ < 1 \\ \dot{v}_+ = \dot{v}_+ = 0 & \text{pour } \dot{x}_+ > 1 \end{cases} \quad (42)$$

de la solution du problème dynamique trouvée au paragraphe précédent. Dans ces conditions, les équations du transfert de matière se présentent sous la forme

$$\begin{cases} \dot{s}_+ \dot{y}_+ \frac{\partial c_+}{\partial \dot{x}_+} + \frac{\partial c_+}{\partial \dot{y}_+} = \frac{\partial^2 c_+}{\partial \dot{y}_+^2} & \text{pour } 0 < \dot{x}_+ < 1 \\ \text{avec les conditions aux limites} \\ c_+ = 1 & \text{en } \dot{y}_+ = 0 \\ c_+ \rightarrow 0 & \text{pour } \dot{y}_+ \rightarrow \infty \end{cases} \quad (43)$$

et

$$\begin{cases} \dot{s}_+ \dot{y}_+ \frac{\partial c_+}{\partial \dot{x}_+} = \frac{\partial^2 c_+}{\partial \dot{y}_+^2} & \text{pour } \dot{x}_+ > 1 \\ \text{avec les conditions aux limites} \\ c_+ \rightarrow 0 & \text{en } \dot{y}_+ \rightarrow \infty \\ \frac{\partial c_+}{\partial \dot{y}_+} = 0 & \text{pour } \dot{y}_+ = 0 \end{cases} \quad (44)$$

3.2. Recherche d'une solution approchée

Pour \dot{x}_+ tel que $0 < \dot{x}_+ < 1$, le système (43) devient, après application de la transformation de Laplace relative à \dot{x}_+ sur c_+

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{C}}{d\dot{y}_+^2} - \frac{d\bar{C}}{d\dot{y}_+} - \dot{s}_+ \dot{y}_+ p \bar{C} = 0 \\ \text{avec } \bar{C} = 1/p & \text{en } \dot{y}_+ = 0 \\ \text{et } \bar{C} \rightarrow 0 & \text{pour } \dot{y}_+ \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (45)$$

En nous limitant à une approximation du premier ordre correspondant à

$$|e^{\dot{y}_+} - 1| \leq 1 \quad (46)$$

ce qui est tout à fait suffisant lorsqu'on s'intéresse à la recherche de la distribution de concentration au voisinage du plan $\dot{y}_+ = 0$, la solution de (45) s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{C} = & \frac{3^{1/6} \Gamma(2/3)}{\pi} \dot{s}_+^{1/6} p^{-5/6} (e^{\dot{y}_+} - 1)^{1/2} \\ & \times K_{1/3} [2/3 \dot{s}_+^{1/2} p^{1/2} (e^{\dot{y}_+} - 1)^{3/2}] \end{aligned} \quad (47)$$

et celle de (43)

$$\begin{aligned} c_+(\dot{x}_+, \dot{y}_+) = & \frac{3^{1/2} \Gamma(2/3)}{2\pi} \\ & \times \Gamma \left[\frac{1}{3}, \frac{\dot{s}_+}{3^2} \frac{(e^{\dot{y}_+} - 1)^3}{\dot{x}_+} \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

En $\dot{x}_+ = 1$, cette expression s'écrit

$$\begin{aligned} c_+(\dot{x}_+ = 1, \dot{y}_+) = & \frac{3^{1/2} \Gamma(2/3)}{2\pi} \\ & \times \Gamma \left[\frac{1}{3}, \frac{\dot{s}_+}{3^2} (e^{\dot{y}_+} - 1)^3 \right] = C_+^*(\dot{y}_+) \end{aligned} \quad (49)$$

et elle représente la condition à l'origine du problème en $\dot{x}_+ > 1$.

Cherchons maintenant la solution de ce problème. Pour cela, nous opérons la translation

$$\dot{x}_+^* = \dot{x}_+ - 1 \quad (50)$$

et nous appliquons la transformation de Laplace à la variable \dot{x}_+^* . Le système (44) devient

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{C}}{d\dot{y}_+^2} - \dot{s}_+ \dot{y}_+ p \bar{C} = -\dot{s}_+ \dot{y}_+ C_+^*(\dot{y}_+) \\ \text{avec } \bar{C} \rightarrow 0 & \text{pour } \dot{y}_+ \rightarrow \infty \\ \text{et } \frac{\partial \bar{C}}{\partial \dot{y}_+} = 0 & \text{en } \dot{y}_+ = 0. \end{cases} \quad (51)$$

La solution de ce système fait intervenir les fonctions d'Airy $Ai(\eta)$ et $Bi(\eta)$ après avoir fait le changement de variable :

$$\eta = \dot{s}_+^{1/3} p^{1/3} \dot{y}_+ \quad (52)$$

et elle s'exprime par

$$\begin{aligned} \bar{C}(\eta) = & \frac{\pi}{p} \left[Ai(\eta) \left\{ \int_0^\eta \eta Bi(\eta) C_+^*(\eta) d\eta \right. \right. \\ & \left. \left. + 3^{1/2} \int_0^\infty \eta Ai(\eta) C_+^*(\eta) d\eta \right\} \right. \\ & \left. + Bi(\eta) \int_\eta^\infty Ai(\eta) C_+^*(\eta) d\eta \right] \end{aligned} \quad (53)$$

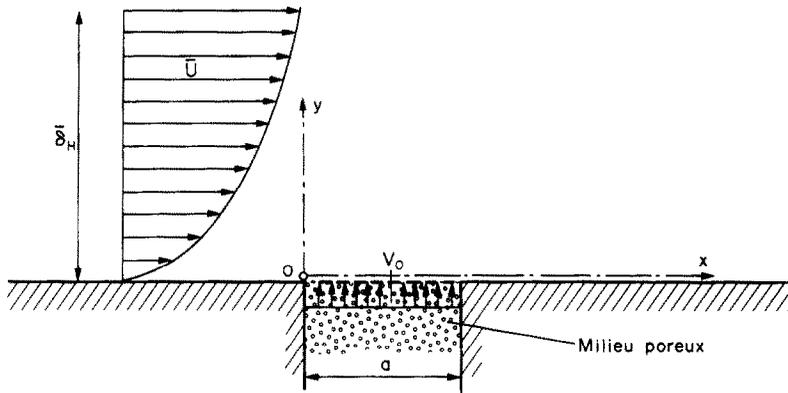


FIG. 1.

ce qui représente l'expression générale de la concentration opérationnelle après la fente d'injection.

Dans cette expression nous avons

$$C_+^*(\eta) = \frac{3^{1/2} \Gamma(2/3)}{2\pi} \chi \Gamma \left\{ \frac{1}{3}, \frac{s_+}{3^2} (e^{s_+^{-1/3} p^{-1/3} \eta} - 1)^3 \right\}. \quad (54)$$

Mais comme les mesures expérimentales que nous envisageons se feront à la paroi, il s'en suit que nous nous limiterons ici à la détermination de la distribution de la concentration en $\eta = 0$.

Dans ces conditions, (53) se réduit à

$$\bar{C}|_{\eta=0} = \frac{3^{1/3}}{p} \int_0^\infty \eta Ai(\eta) C_+^*(\eta) d\eta \quad (55)$$

ce qui nous conduit à une expression de la concentration au voisinage de la paroi s'écrivant

$$c_+|_{y_+=0} = \frac{3^{3/2}}{2\pi} \int_0^\infty \xi e^{-\xi^3} \times \Gamma \left\{ \frac{1}{3}, \frac{s_+}{3^2} (e^{(3^{2/3} s_+^{1/3} / \xi^{1/3}) \xi} - 1)^3 \right\} d\xi \quad (56)$$

sachant que

$$\xi = \frac{s_+^{1/3} y}{3^{2/3} x_+^{1/3}}. \quad (57)$$

Cette expression se comporte à l'origine, soit en $x_+^* \rightarrow 0$, comme

$$c_+(x_+^* \rightarrow 0)|_{y_+=0} = \frac{3^{2/3} \Gamma(1/3)}{2\pi} \int_0^\infty \xi e^{-\xi^3} d\xi \quad (58)$$

qui après intégration s'écrit

$$c_+(x_+^* \rightarrow 0)|_{y_+=0} = 1.$$

Ce résultat confirme la continuité de la solution de transfert de matière en $x = a$.

Par ailleurs, lorsque $x_+^* \rightarrow \infty$, le noyau de l'intégrale (56) tend vers zéro, ce qui annonce l'évanouissement normal de la pollution à grande distance.

Etant donné la position de l'origine 0, l'expression donnant la distribution approchée de la concentration du fluide polluant au voisinage de la paroi en aval de la perturbation en tenant compte de (50) est finalement

$$c_+(x_+^*)|_{y_+=0} = \frac{\int_0^\infty \xi e^{-\xi^3} \Gamma \left\{ \frac{1}{3}, \frac{s_+}{3^2} [e^{3^{2/3} (x_+^* - 1)^{1/3} / s_+^{1/3}} \xi - 1]^3 \right\} d\xi}{\Gamma(1/3) \int_0^\infty \xi e^{-\xi^3} d\xi} \quad (59)$$

4. CONCLUSION

Nous avons pu au cours de cette étude définir une expression analytique de la distribution de concentration pariétale en aval de la fente. Cette relation montre nettement que le gradient de vitesse pariétal et par suite le frottement pariétal influencent cette distribution.

Disposant une microélectrode (comme nous savons le faire au Laboratoire) près de la fente pour détecter la concentration locale, nous avons ainsi conçu un instrument de mesure du frottement pariétal local. D'autres applications sont également possibles notamment dans le cas de techniques de détection de concentration d'espèces polluantes et instantanément.

REFERENCES

1. F. F. Ehrich, Penetration and deflection of jets oblique to a general stream, *J. Aero. Sci.* **28**, 99-104 (1953).
2. I. Wagnanski et B. G. Newman, The reattachment of an inclined two-dimensional jet to a flat surface in streaming-flow, *CASI Trans.* **1**, 3-8 (1968).
3. R. H. Nunn et H. Brandt, Aerodynamic throttling of two dimensional nozzle flows, *Aero. Quart.* **23**, 53-61 (1972).
4. J. B. Stek et H. Brandt, Aerodynamic throttling of a two-dimensional flow by a thick jet, *Aero Quart.* **26**, 229-242 (1976).
5. G. Bergeles, A. D. Gosman et B. E. Launder, The near field character of a jet discharged through a wall at 90° to a main stream, A.S.M.E. Winter Annual Meeting,

- A.S.M.E. paper 75-WA/HT 108 (1975).
6. The prediction of three-dimensional discrete-hole cooling processes—I. Laminar flow, A.S.M.E. Winter Annual Meeting, A.S.M.E. paper 75-WA/HT 109 (1975).
 7. The near field character of a jet discharged normal to a mainstream, *J. Heat Transfer* **98**, 373–378 (1976).
 8. Near field character of a jet discharged through a wall at 30° to a mainstream, *A.I.A.A. J.* **15**, 499–504 (1977).
 9. D. T. L. Chan, Jung-Tai Lin et J. F. Kennedy, Entrainment and Drag Forces of deflected jets, *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs. J. Hydraul. Div.* **102**, 615–635 (1976).
 10. Z. M. Moussa, J. W. Trischka et S. Eskinazi, The near field in the mixing of a round jet with a cross-stream, *J. Fluid. Mech.* **80**, 49–80 (1977).
 11. P. V. Lebrocq, B. E. Launder et C. H. Priddin, Discrete hole injection as a means of transpiration cooling; an experimental study, *Proc. Instn. Mech. Engrs* **187**, 149–157 (1973).
 12. E. M. Sparrow, R. J. Goldstein et M. A. Rouf, Effect of nozzle—surface separation distance on impingement heat transfer for a jet in a crossflow, *J. Heat Transfer* **97**, 528–533 (1975).
 13. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, pp. 362–390, 6ème édition. McGraw-Hill (1968).
 14. B. D. Aggarwala et M. K. Gangal, Fully developed laminar flow in porous ducts, *J. Math. Phys. Sci.* **11**, 37–46 (1977).
 15. H. S. Mukunda, A. Subhananda et M. Sambashiva Rao, Flow studies in non circular tubes with wall injection, *Combust. Sci. Technol.* **15**, 21–29 (1977).
 16. W. A. Fiveland et P. C. Lu, Transient boundary layers between porous plates, *J. Appl. Mech.* **43**, 555–558 (1976).
 17. K. Seshadri et F. A. Williams, Laminar flow between parallel plates with injection of a reactant at high Reynolds number, *Int. J. Heat Mass Transfer* **21**, 251–253 (1978).
 18. J. P. Agarwal et S. K. Roy, Effect of suction and injection on flow along a vertical plane surface *Appl. Sci. Res.* **35**, 373–391 (1979).

MASS TRANSFER CAUSED BY A NORMAL WALL INJECTION IN A LAMINAR FLOW WITH HIGH SCHMIDT NUMBER

Abstract—This study centres round the problem of mass transfer caused by a normal injection of fluid through a mean plane laminar flow, in the hypothesis of no chemical reaction in the entry zone. One solution of the dynamic problem of perturbation is established in the case of a porous region of injection. In this condition, with the very small thickness of the diffusion boundary layer, the problem of mass transfer is simplified and one approximate solution of the distribution of the injected fluid concentration, past the blowing hole near the wall, is determined. It is permitted to look at the measure of skin friction by a detection of the local concentration.

STOFFÜBERTRAGUNG DURCH EINE INJEKTION SENKRECHT ZUR WAND IN EINE LAMINARSTRÖMUNG VON HOHER SCHMIDT-ZAHL

Zusammenfassung—Diese Untersuchung befaßt sich mit dem Problemkreis der Stoffübertragung, die dann auftritt, wenn senkrecht in eine ebene laminare Grundströmung ein Fluid injiziert wird. Dabei wird angenommen, daß im Eintrittsbereich keine chemischen Reaktionen stattfinden. Eine Lösung für das dynamische Störungsproblem wird für den Fall angegeben, daß die Injektionszone porös ist. Unter diesen Bedingungen bei einer sehr kleinen Grenzschichtdicke der Diffusion läßt sich das Stoffübertragungsproblem vereinfachen. Eine Näherungslösung für die Konzentrationsverteilung des injizierten Fluids hinter der Auslaßöffnung in Wandnähe wird ermittelt. Es ist zulässig, das Ausmaß der Wandreibung durch Bestimmung der örtlichen Konzentration zu beurteilen.

МАССОПЕРЕНОС ПРИ ВДУВЕ ЧЕРЕЗ СТЕНКУ ПОД ПРЯМЫМ УГЛОМ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ШМИДТА

Аннотация — Исследуется перенос массы при подаче жидкости под прямым углом в плоский ламинарный поток в предположении отсутствия химической реакции во входной зоне. Получено одно решение для динамической задачи в случае вдува через пористую стенку. Для весьма тонкого диффузионного пограничного слоя задача о массопереносе упрощается, что дает возможность получить одно приближенное решение для распределения концентрации вдуваемой жидкости у стенки. Поверхностное трение можно выражать через локальную концентрацию вдуваемой жидкости.